ИНЪЕКТОРЫ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Н.Т. Воробьев[1], М.Г. Семёнов[2]

Витебский государственный университет имени П.М. Машерова
Московский проспект 33, 210038 Витебск, Беларусь
[1]vorobyovnt@tut.by, [2]mg-semenow@mail.ru

Значительный прогресс в развитии неарифметической силовской теории конечных групп был достигнут в работе Гашюца, Фишера и Хартли [1], где установлено, что для любого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ в любой конечной разрешимой группе существуют $\mathfrak{F}$-инъекторы и любые два из них сопряжены. Напомним, что класс групп $\mathfrak{F}$ называют классом Фиттинга, если $\mathfrak{F}$ замкнут относительно взятия нормальных подгрупп и произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп. При этом подгруппа V группы G называется $\mathfrak{F}$-инъектором G, если $V \bigcap N$ является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой в N для любой субнормальной подгруппы N из G. Локализуя понятие класса Фиттинга, Л.А. Шеметков определил в [2] множество Фиттинга конечной группы, как непустое множество $\mathcal{F}$ её подгрупп, которое замкнуто относительно взятия нормальных подгрупп, нормальных произведений и сопряжений. Понятие $\mathcal{F}$-инъектора для множества Фиттинга $\mathcal{F}$ определяется аналогично понятию $\mathfrak{F}$-инъектора для класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Заметим, что каждому классу Фиттинга $\mathfrak{F}$ соответствует множество Фиттинга $\mathcal{F} = \{H \leqslant G : H \in \mathfrak{F}\}$, хотя обратное в общем случае неверно (см. [3, пример VIII.2.2(b)]). Более того, в этом случае множество всех $\mathfrak{F}$-инъекторов и $\mathcal{F}$-инъекторов группы G совпадают. Поэтому, указанная выше теорема Гашюца-Фишера-Хартли является следствием теоремы Шеметкова [2] о том, что для любого множества Фиттинга $\mathcal{F}$ в конечной π-разрешимой группе (π – множество всех простых делителей порядков всех групп из $\mathcal{F}$) существуют $\mathcal{F}$-инъекторы и любые два из них сопряжены.

Пусть $\mathcal{F}$ – множество Фиттинга конечной группы G и $G_{\mathcal{F}}$ – наибольшая нормальная $\mathcal{F}$-подгруппа G. Можно показать, что если $\mathfrak{X}$ – класс Фиттинга, то $\mathcal{F} \bullet \mathfrak{X} = \{H \leqslant G : H/H_{\mathcal{F}} \in \mathfrak{X}\}$ является множеством Фиттинга G. Пусть π – некоторое множество простых чисел, π' – дополнение π во множестве всех простых чисел и $\mathfrak{E}_{\pi'}$ – класс Фиттинга всех π'-групп. Множество Фиттинга $\mathcal{F}$ группы G назовем π-насыщенным, если $\mathcal{F} = \mathcal{F} \bullet \mathfrak{E}_{\pi'}$. Нами доказана

Теорема 1. *В любой конечной π-разрешимой группе G для любого π-насыщенного множества Фиттинга $\mathcal{F}$ группы G существуют $\mathcal{F}$-инъекторы и любые два из них сопряжены.*

Пусть в дальнейшем $\pi = \sigma(\mathcal{F})$ – множество всех простых делителей порядков всех $\mathcal{F}$-подгрупп из множества Фиттинга $\mathcal{F}$ группы G и $\mathfrak{S}^{\pi}$ – класс всех π-разрешимых групп. Теоремы Шеметкова [2] и Баллестера-Болинше [4] о существовании и сопряженности $\mathcal{F}$-инъекторов являются специальными случаями следующего, доказанного нами, результата.

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{F}$ – множество Фиттинга конечной группы G. Тогда если $G \in \mathcal{F} \bullet \mathfrak{S}^{\pi}$, то в G существуют $\mathcal{F}$-инъекторы и любые два из них сопряжены.*

Литература

1. Fischer B., Gaschütz W., Hartley B. *Injektoren endlicher auflösbarer Gruppen* // Math. Z. 1967. Bd. 102. S. 337–339.

2. Шеметков Л. А. *О подгруппах π-разрешимых групп* // В кн.: Конечные группы. Минск: Наука и техника, 1975. С. 207–212.

3. Doerk K., Hawkes T. O. *Finite Soluble Groups.* Berlin–New York : Walter de Gruyter & Co., 1992.

4. Ballester-Bolinches A., Ezquerro L. M. *Classes of finite groups.* Dordrecht : Springer, 2006.